Fizika gorenia i vzryva, **1993, vol. 29, (no.2), p.134-136.**

УДК 624.131 + 532.215 + 534.22

В. Ф. Нестеренко

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ДИСКРЕТНОЙ СРЕДЕ С АНОМАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОСТЬЮ

В работах [1—4] рассмотрено распространение нелинейных волн в дискретных одномерных средах при законе взаимодействия соседних частиц $F = A\delta^n$, где F — сила; δ — сближение частиц. Длинноволновое приближение для этого случая имеет вид:

$$u_{tt} = -c_n^2\left\{(-u_x)^n + \frac{na^2}{6(n+1)}\left[(-u_x)^{\frac{n-1}{2}}\left((-u_x)^{\frac{n+1}{2}}\right)_{xx}\right]\right\}_x, \quad (1)$$

$$n > 0, \; -u_x > 0.$$

Здесь a — расстояние между частицами; u — смещение из положения равновесия; c_n — параметр с размерностью скорости.

Ограничение $\xi = -u_x > 0$, очевидно, необходимо как при соответствующих n, так и при нулевой прочности системы на разрыв, характерной для несвязных дискретных сред. Различные виды записи (1), в том числе со смешанной старшей производной, а также лагранжианы для вариационной формулировки задачи приведены в [4].

В [1—4] показано, что при $n > 1$ уравнение (1) допускает наличие стационарных периодических и уединенных волн сжатия нового типа «нестонов», являющихся несущим тоном для «звукового вакуума». Данное определение отражает то обстоятельство, что длинноволновая скорость звука при начальной деформации $\xi_0 = 0$ $(\delta_0 = 0)$ равна нулю. В «звуковом вакууме» отсутствуют уединенные волны разрежения. Отметим, что качественная адекватность реальной системе длинноволновых уравнений типа (1) естественна, если отброшенные члены значительно меньше оставленного $\sim c_n^2 u^n a^2/L^{n+3}$, где L — характерный пространственный размер возмущения. Последнее утверждение может быть справедливо и при $L \geqslant a$ в отличие от традиционного критерия длинноволновости $L \gg a$. Можно ожидать, что аналогичные существенно нелинейные периодические и уединенные волны $(\xi_{max} \gg \xi_0)$ будут типичны для всех дискретных систем типа «звуковой вакуум», т. е. где закон взаимодействия между соседними элементами структуры обеспечивает равенство нулю длинноволновой скорости звука при $\xi_0 = 0$, а не только для степенной зависимости $F(\delta)$.

Представляет интерес выявить наличие стационарных решений (1) при $0 < n < 1$. Данные значения n соответствуют аномальному поведению среды при сжатии, т. е. уменьшению ее модуля упругости с ростом деформации. Это характерно для сред, испытывающих фазовый переход или разрушение. Аналогично случаю $n > 1$ для стационарных решений $u(x - Vt)$ (1) можно свести к уравнению нелинейного осциллятора в потенциальном поле $W(y)$

$$y_{\eta\eta} = -\frac{\partial W}{\partial y},$$

$$W(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{(n+1)}{4} y^{\frac{4}{n+1}} + C y^{\frac{2}{n+1}}, \tag{2}$$

$$\eta = \frac{x}{a}\sqrt{\frac{6(n+1)}{n}}, \quad y = \xi^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{c_n}{V}\right)^{\frac{n+1}{n-1}},$$

C — константа; $y > 0$.

При $0 > C > N_1 = \frac{(n^2-1)}{2} n^{n/1-n}$ $W(y)$ будет иметь два экстремума y_1 и y_2, причем $y_2 > y_1$ (y_1 соответствует минимуму, y_2 — максимуму). Отметим, что относительное расположение экстремумов в случае $0 < n < 1$ обратно их расположению для $n > 1$ при соответствующих значениях константы C [1—4]. Если

$$\frac{n-1}{2}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = N_2 > C > N_1, \tag{3}$$

то кривая $W(y)$ будет располагаться в нижнем правом квадранте плоскости $W(y) \div y$. При $C = N_2$ кривая $W(y)$ будет касаться оси абсцисс (y) в точке максимума $y_{20} = (2n/n+1)^{(n+1)/2(1-n)}$, а при $C \to N_1$ оба экстремума будут сливаться в одной точке $y_0 = n^{(n+1)/2(1-n)}$.

По физическому смыслу y_2 соответствует начальному состоянию системы. Отмеченное относительное расположение y_1 и y_2 позволяет сделать вывод о возможности существования периодических волн и уединенных волн разрежения при $\xi > 0$ в случае (3). Уединенные волны сжатия в данной системе ($0 < n < 1$) отсутствуют в противоположность значениям $n > 1$. Если по физическому смыслу допустимы и отрицательные величины ξ, то уединенные волны возможны и при $0 > C > N_2$.

Используя отмеченные свойства функции $W(y)$, можно найти зависимость фазовой скорости V уединенной волны разрежения от деформации в ее минимуме ($\xi_{\min} \ll \xi_0$) при полной «энергии» нелинейного осциллятора (2) $W_0 = W(y_2)$ и условии (3):

$$V = c_n\left\{\frac{(n^2-1)\,\xi_0^2}{4\,[\xi_0 n - \xi_{\min}(n+1)]\,C}\right\}^{n-1/2} \tag{4}$$

Если $\xi_{\min} \to 0$, что соответствует $C \to N_2$,

$$V \to c_n \xi_0^{n-1/2}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{1/2}.$$

При $C \to N_1$

$$V \to c_n \sqrt{n}\, \xi_0^{n-1/2}.$$

Поскольку в начальном состоянии длинноволновая скорость звука $c_0 = c_n\sqrt{n}\xi_0^{n-1/2}$, то можно сделать вывод о сверхзвуковой природе уединенной волны разрежения в системе с $0 < n < 1$ по отношению к начальному состоянию. Данное свойство также легко просматривается из соотношения

$$\frac{V^2}{c_0^2} = \frac{1}{n}\, y_2^{2(1-n)/(n+1)}$$

и предельных значений y_2, соответствующих условию (3).

Характерный пространственный размер уединенной волны разрежения составляет, например при $n = 1/2$, $\sim 20a$.

В заключение целесообразно отметить, что в окрестности $n = 1$ наблюдается своеобразная «звуковая катастрофа». Действительно, при сколь угодно малом отличии n от 1 в ту или иную сторону по сравнению с $n = 1$ становятся запрещенными стационарные уединенные волны разрежения ($n > 1$) или сжатия ($n < 1$). Кроме того, если для $n < 1$ скорость уединенных волн разрежения при $\xi_{min}/\xi_0 \ll 1$ определяется ξ_0 и стремится к c_0 при $n \to 1$, то для $n > 1$ при $\xi_{max}/\xi_0 \gg 1$ скорость волны сжатия зависит лишь от ξ_{max} и не стремится к скорости звука c_0 [2—4] при $n \to 1$. Отличительной особенностью таких систем является соразмерность характерных пространственных масштабов существенно нелинейного возмущения с внутренним размером структуры среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестеренко В. Ф. Импульсное нагружение гетерогенных материалов.— Новосибирск: Наука, 1992.— 198 с.
2. Нестеренко В. Ф. Нелинейные волны в «звуковом вакууме» // ФГВ.— 1992.— 28, № 3.— С. 121.
3. Nesterenko V. F. Pulse compression nature in a strongly nonlinear grained medium // Proc. Int. Symp. on intense dynamic loading and its effects.— Chengdu, China, 1992.— P. 236—239.
4. Нестеренко В. Ф. Новый тип коллективных возбуждений в «звуковом вакууме» // Материалы второго семинара «Акустика неоднородных сред».— Новосибирск, 1992.— С. 228—233.

г. Новосибирск *Поступила в редакцию 28/XII 1992 г.*